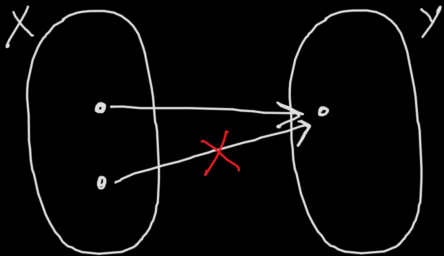
Conjunto

Contável

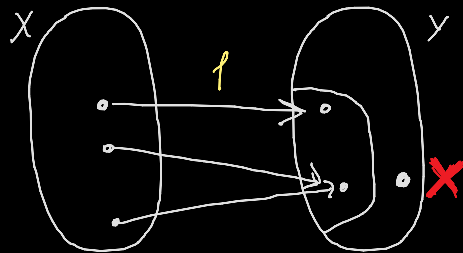
# Introdução

- Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é




injetora

$$\forall x \neq y,\ f(x) \neq f(y)$$




sobrejetora

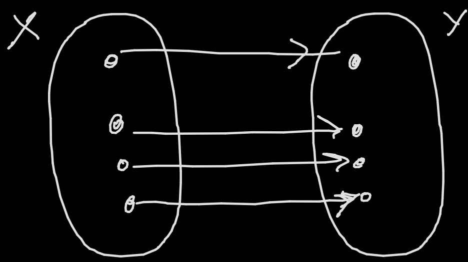
$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y$$

ou

$$Im(f) = Y$$

# Introdução

- Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é



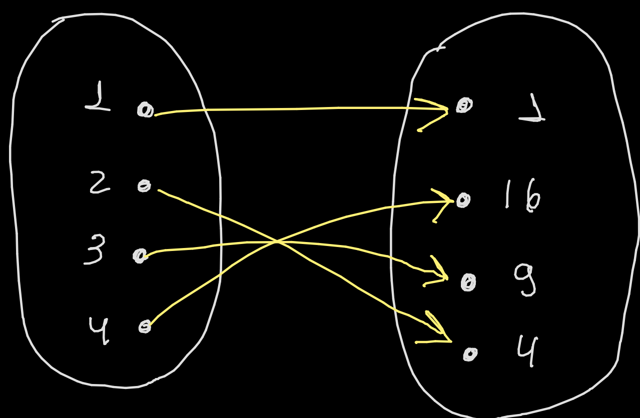

bijetora

$f$ é injetora e sobrejetora

## Exemplo

$$\varphi: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 4, 9, 16\}$$

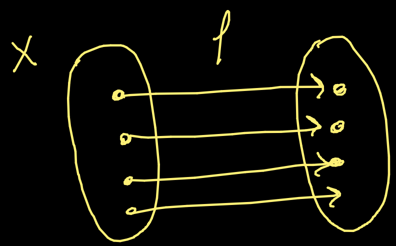
$$\varphi(x) = x^2$$

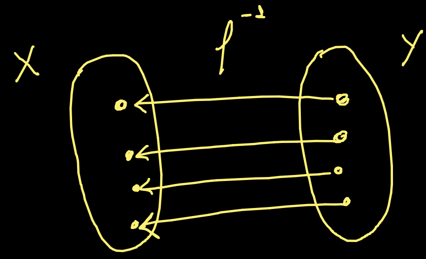


Escrevemos $X \sim Y$ se existe uma bijeção $f: X \to Y$.

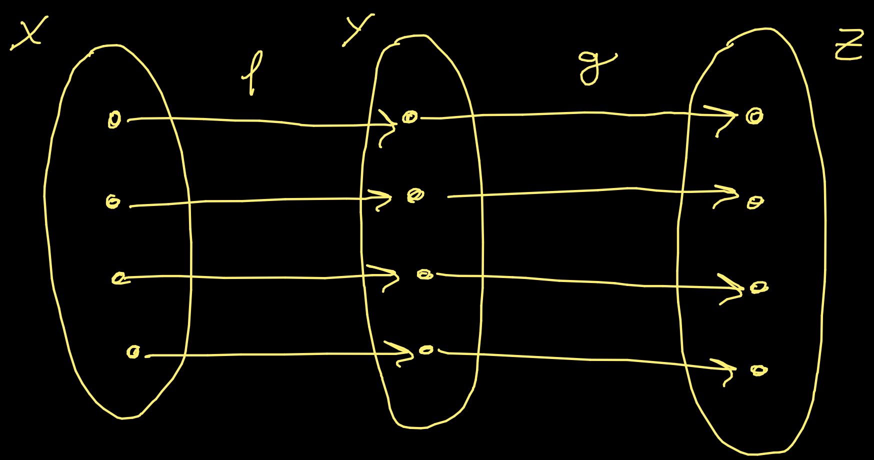
Propriedades

- $X \sim Y$, então $Y \sim X$




- $X \sim Y$ e $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$




$g \circ f : X \to Z$ é uma bijeção

# Introdução

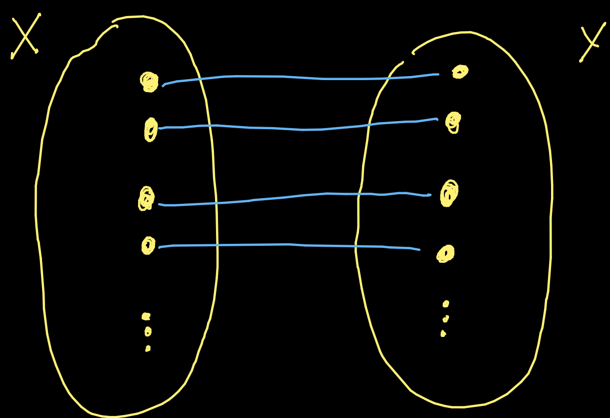
$\{1, 5, 7, 8\} = 4$

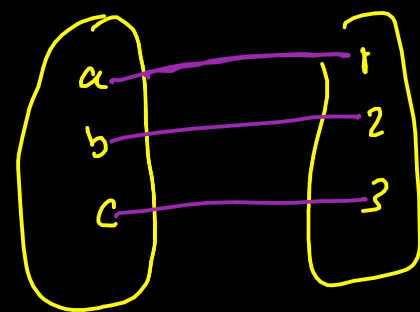
$\mathbb{N}\ \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

* Como comparar o tamanho (cardinalidade) de dois conjuntos infinitos?

  * Conjuntos finitos: contamos o número de membros
  * Conjuntos infinitos: vamos contar p/ sempre...

* George Cantor (1873): emparelhar membros dos conjuntos

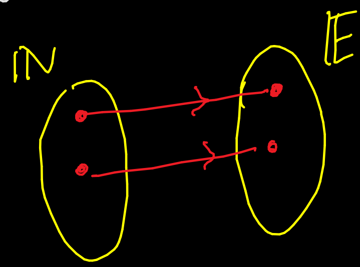



* Se $X \sim Y$, então $X$ e $Y$ possuem o mesmo tamanho.

## Exemplo

- Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais, i.e., $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Seja $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos naturais pares
- Pela definição de Cantor, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{E}$ possuem o mesmo tamanho




| $\mathbb{N}$ | $\mathbb{E}$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

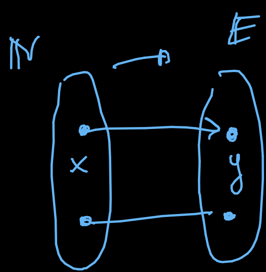
$$f(x) = 2x$$

**$f: \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ é bijetora.**

* $\underset{\in \mathbb{N}}{x_1} \neq \underset{\in \mathbb{N}}{x_2} \iff 2x_1 \neq 2x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$ (injetora)

* $y \in \mathbb{E} \Rightarrow y = 2x = f(x)$ (sobrejetora)

$\hookrightarrow x \in \mathbb{N}$



## Definição

Um conjunto $A$ é <u>contável</u> se ele é finito ou $\mathbb{N} \sim A$

## Observações:

* Podemos "listar" os elementos de um conjunto contável

| $\mathbb{N}$ | $\mathbb{E}$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

$2, 4, 6, 8, \ldots$

* $\mathbb{N} \sim A \Leftrightarrow A \sim \mathbb{N}$

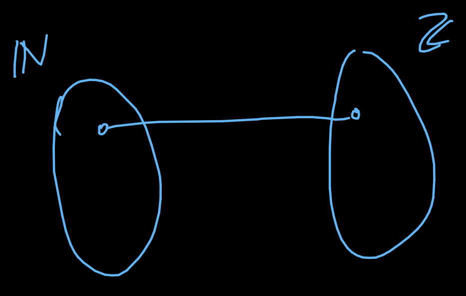
**Teorema** O conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ é contável.

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots \quad \dots \quad x, -x$

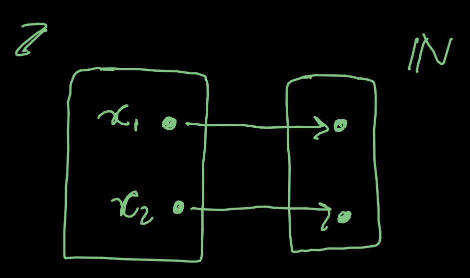
| $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | -1 |
| 3 | 1 |
| 4 | -2 |
| 5 | 2 |
| 6 | -3 |
| ⋮ | ⋮ |

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } n \geq 0 \\ -2n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$




f é uma função Injetora




* $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ t.q. $x_1 \neq x_2$

* casos : $x_1$ e $x_2$ possuem o mesmo sinal ou não.

caso 1: $x_1$ e $x_2$ possuem o mesmo sinal

$\boxed{\geq 0}$

$f(x_1) = 2x_1 + 1$

$f(x_2) = 2x_2 + 1$

$\boxed{< 0}$

$f(x_1) = -2x_1$

$f(x_2) = -2x_2$

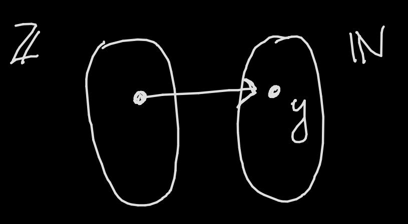
caso 2: $x_1$ e $x_2$ possuem sinais distintos

$f(x_1) = 2x_1 + 1$ (ímpar)

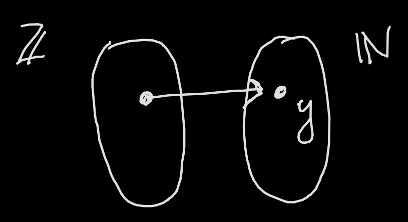
$f(x_2) = -2x_2$ (par)

* Como $f(x_1) \neq f(x_2)$ em todos os caso, f é injetora.

f é uma função sobrejetora




- Seja $y \in \mathbb{N}$
- Dois casos: y é par ou ímpar
- Caso: y é par
  - $y = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$
  - $-k \in \mathbb{Z}$
  - $f(-k) = -2(-k) = 2k = y$
- Caso: y é ímpar




  - $y = 2k+1, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$
  - $f(k) = 2k + 1 = y$

- Em ambos os casos, $\exists\, k \in \mathbb{Z} : f(k) = y$

  $\to$ f é sobrejetora

- Como f é injetora e sobrejetora, f é bijetora

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$$

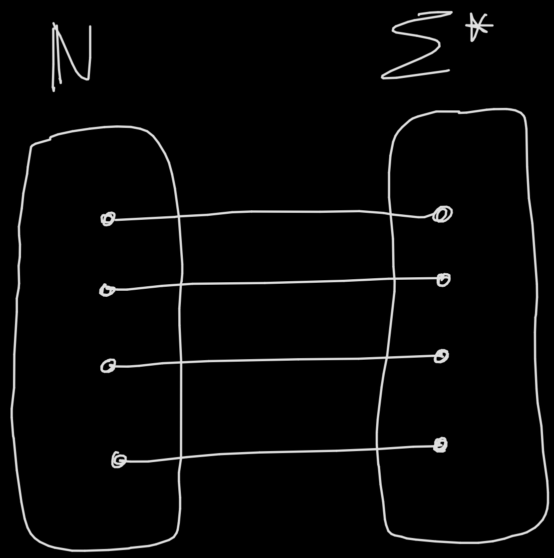
$\Rightarrow \mathbb{Z}$ é contável.

Teorema: o conjunto $\Sigma^*$ é contável para qualquer $\Sigma$.

## Demonstração

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

cadeias de comprimento $i$



**Teorema:** o conjunto $\Sigma^*$ é contável para qualquer $\Sigma$.

$\overset{1}{xx}, \overset{2}{xxxx},$

$$|\Sigma^i| = |\Sigma|^i$$

↳ conj. de todas as cadeias de comprimento $i$ (É FINITO!)

$$\Sigma^0, \Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \Sigma^4, \dots$$

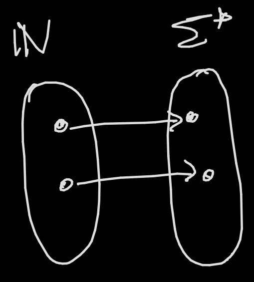
$\Sigma = \{a, b\}$

$$\underbrace{\varepsilon}_{\Sigma^0}, \underbrace{a, b}_{\Sigma^1}, \underbrace{aa, ab, ba, bb}_{\Sigma^2}, \underbrace{aaa, aab, aba}_{\Sigma^3}$$

## Demonstração

* Vamos mostrar que $\mathbb{N} \sim \Sigma^*$
* Seja $f(i) = i$-ésima cadeia de $\Sigma^*$ segundo uma ordem lexicográfica sobre $\Sigma$.

* $f$ é injetora
  - nossa lista não tem repetição, então




$$f(i) \neq f(j) \quad \forall\, i \neq j$$

* $f$ é sobrejetora

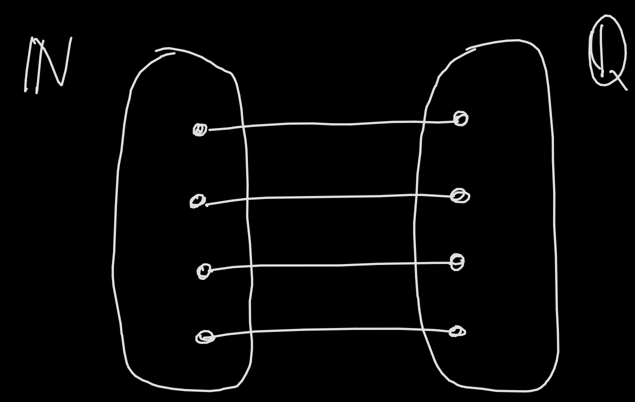
$\underset{1}{aa}, \underset{2}{ab}, \underset{3}{ba}, bb, \dots \underset{i}{xxx}$

  - Seja $w \in \Sigma^*$
  - $w$ ocupa uma posição $i$ na lista de palavras de $\Sigma^*$
  - $f(i) = w$

* Como $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$ é injetora e sobrejetora, temos que $\mathbb{N} \sim \Sigma^*$.

∎

**Teorema:** o conjunto $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ é contável.




* Vamos listar todos os elementos de $\mathbb{Q}$ e emparelhar o i-ésimo elemento dessa lista com i

    * Precisamos mostrar que é possível listar todos esses elementos sem esquecer de nenhum!

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | ... |

denominador

| numerador | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{0}{2}$ | $\frac{0}{3}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{0}{5}$ | ... |
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | ... |
| 2 | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | ... |
| 3 | $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | ... |
| 4 | $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

**Teorema:** o conjunto $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ é contável.

denominador

| numerador | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{0}{2}$ | $\frac{0}{3}$ | $\frac{0}{4}$ | $\frac{0}{5}$ | ... |
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | ... |
| 2 | $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | ... |
| 3 | $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | ... |
| 4 | $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

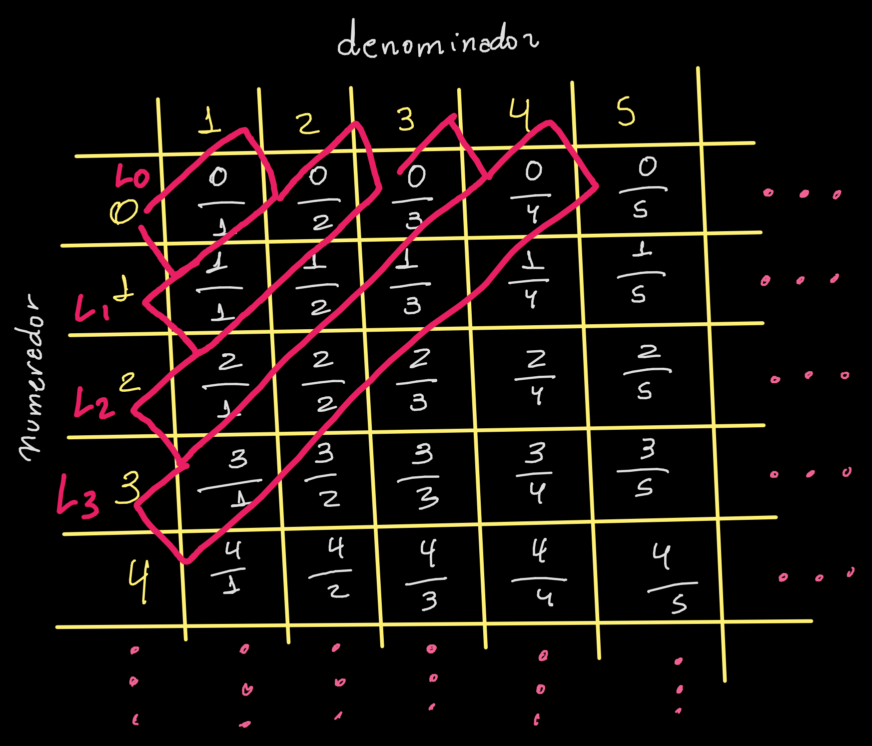
$\longrightarrow L = Lin_0, \overset{\alpha}{Lin_1}, Lin_2$

$$\underset{1}{\frac{0}{1}},\ \underset{2}{\frac{1}{1}},\ \underset{3}{\frac{1}{2}},\ \underset{4}{\frac{1}{3}},\ \underset{5}{\frac{1}{4}},\ \underset{6}{\frac{1}{5}}\ \ldots$$

**Observação:** nunca vamos listar 2.

**Teorema:** o conjunto $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$

é contável.




Finita

$$L_i = \left\{ \frac{i}{1}, \frac{i-1}{2}, \frac{i-2}{3}, \dots, \frac{0}{i+1} \right\}$$

$$L_0 = \left\{ \frac{0}{1} \right\}, \quad L_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3} \right\}$$

$$L = L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, \dots$$

$$\underbrace{\frac{0}{1}}_{L_0}, \underbrace{\frac{1}{1}, \cancel{\frac{0}{2}}}_{L_1}, \underbrace{\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \cancel{\frac{0}{3}}}_{L_2}, \underbrace{\frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \cancel{\frac{1}{3}}, \cancel{\frac{0}{4}}}_{L_3}, \frac{4}{1}$$

$$L = L_0, L_1 \setminus L_0, L_2 \setminus \{L_0 \cup L_1\}, L_3 \setminus \{L_0, L_1, L_2\}$$

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ definida como:

  $f(n) =$ o i-ésimo elemento da lista $L$

-

**Teorema:** o conjunto $\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$ é contável.

$$L_0 = \left\{ \frac{0}{1} \right\},\ L_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0}{2} \right\},\ L_2 = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3} \right\}$$

$$L = L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots$$

$L_i \setminus X$

$$L = \underbrace{\overset{1}{\frac{0}{1}}}_{L_0},\ \underbrace{\overset{2}{\frac{1}{1}}, \cancel{\frac{0}{2}}}_{L_1},\ \underbrace{\overset{3}{\frac{2}{1}}, \overset{4}{\frac{1}{2}}, \cancel{\frac{0}{3}}}_{L_2},\ \underbrace{\overset{5}{\frac{3}{1}}, \cancel{\frac{2}{2}}, \cancel{\frac{1}{3}}, \cancel{\frac{0}{4}}}_{L_3},\ \underbrace{\overset{6}{\frac{4}{1}}}$$

* Conseguimos definir uma lista $L$ que lista todo os elementos de $\mathbb{Q}^+$

$$L = L_0, L_1 \setminus L_0, L_2 \setminus \{L_0, L_1\}, L_3 \setminus \{L_0, L_1, L_2\}, \ldots$$

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ definida como:

$$f(n) = \text{o } i\text{-ésimo elemento da lista } L$$

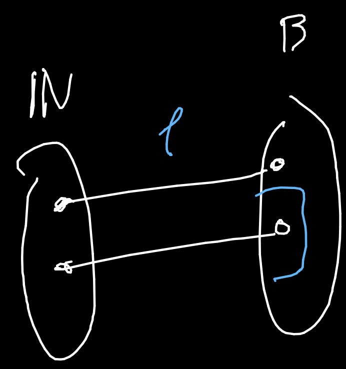
* $f$ é injetora porque a lista não contém elementos repetidos

* $f$ é sobrejetor porque a lista contém todos os elementos de $\mathbb{Q}^+$

**Teorema** Seja $A \subseteq B$ e $B$ é contável, então $A$ é contável.

**Demonstração**

- Se $A$ é finito, então $A$ é contável e o resultado segue.
- Podemos supor que $A$ é infinito, o que implica que $B$ é infinito tbm.




$$\begin{array}{cccccccccc} f & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ L = & \underline{b_1} & \underline{b_2} & b_3 & \underline{b_4} & b_5 & b_6 & \underline{b_7} & b_8 & \cdots \\ g & 1 & 2 & & 3 & & & 4 & & \end{array}$$

- Seja $g: \mathbb{N} \to A$ definida como

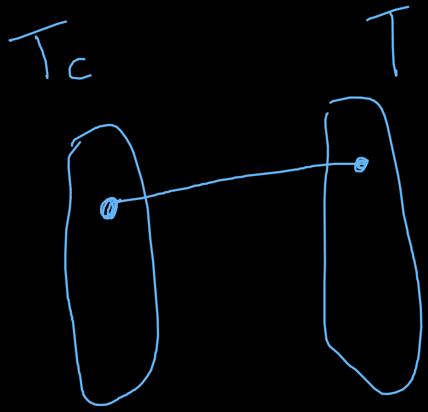
$g(n) =$ "$n$-ésimo elemento de $L$ que pertence ao conj. $A$."

- $g$ é injetora porque $L$ não contém elementos repetidos.
- $g$ é sobrejetora porque $L$ contém todos os elementos de $A$.

$\blacksquare$

**Teorema** o conjunto $T = \{M \mid M$ é uma MT$\}$ é contável.

**Demonstração**



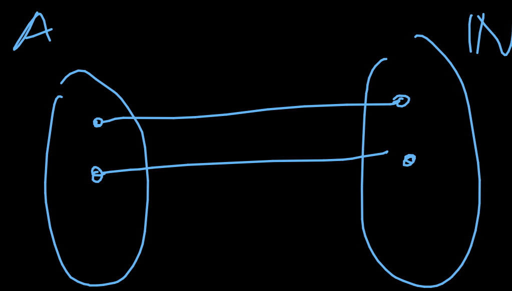

- $M$ possui uma codificação $\langle M \rangle$ sobre um alfabeto $\Sigma$.
- $T_c = \{\langle M \rangle \mid M \in T\}$
- $T \sim T_c \subseteq \Sigma^*$
- Como $\Sigma^*$ é contável, pelo teorema anterior, $T$ é contável

$$T \sim T_c \sim \mathbb{N} \quad = \quad T \sim \mathbb{N}$$

# Método da

# Diagonalização

- Alguns conjuntos infinitos são maiores do que $\mathbb{N}$
- São chamados incontáveis
  - ↳ para eles não existe uma bijeção possível com $\mathbb{N}$



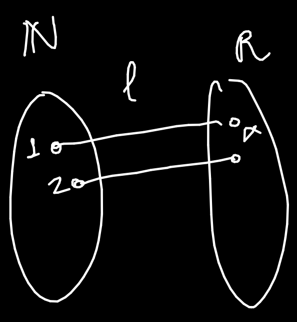
# Conjunto do números Reais é Incontável

**Teorema** O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é incontável.

**Demonstração**

- Suponha, para uma contradição, que existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 1 | 2.7184 81 ... |
| 2 | 3.000000 ... |
| 3 | 1.142034 ... |
| 4 | 0.567123 ... |
| 5 | 19.000000 ... |
| 6 | 3.5143 21 ... |
| ⋮ | ⋮ |




$\pi$, 3.78, ...

- Seja $y \in \mathbb{R}$ o número cuja i-ésima casa decimal é diferente da i-ésima casa decimal de $f(i)$

ñ vamos usar nem 0 nem 9 como sendo o $\neq$ diferente

$0.99\bar{9} = 1.000$

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 1 | 2.7184 81 ... |
| 2 | 3.000000 ... |
| 3 | 1.142034 ... |
| 4 | 0.567123 ... |
| 5 | 19.000000 ... |
| 6 | 3.5143 21 ... |
| ⋮ | ⋮ |

$y = 0.8253 \ldots$

$f(1) \neq y$ $\quad f(3) \neq y \quad \ldots$

$f(2) \neq y$ $\quad f(4) \neq y$

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 1 | 2.7184 81 ... |
| 2 | 3.000000 ... |
| 3 | 1.142034 ... |
| 4 | 0.567123 ... |
| 5 | 19.000000 ... |
| 6 | 3.5143 21 ... |
| ⋮ | ⋮ |
| $j$ | 0.825312 ... |

1 2 3 4 5 6

$y$

? $j$

- Pela construção de $y$, $f(i) \neq y \ \forall i$, mas $f(j) = y$, uma contradição

$A_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia } w\}$

**Teorema** $A_{MT}$ é indecidível.

**Demonstração**

* Suponha, para uma contradição, que $A_{MT}$ é decidível.
* Suponha que H é uma MT que decide $A_{MT}$
* Sobre uma entrada $\langle M, w\rangle$:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{aceita}, & \text{se } M \text{ aceita } w \\ \text{rejeita}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

* Seja D a MT definida por

D = "Sobre a entrada $\langle M\rangle$, onde M é uma MT
1. Execute H sobre $\langle M, \langle M\rangle\rangle$
2. Se H aceita, então <u>rejeite</u>; Se H rejeita, então <u>aceite</u>. "

> * Um compilador em C escrito em C compilando o próprio código.
> * Um formatador de código (tabs, espaçamento) formatando o proprio código.

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{aceita}, & \text{se } M \text{ não aceita } \langle M\rangle \\ \text{rejeite}, & \text{se } M \text{ aceita } \langle M\rangle \end{cases}$$

* Qual a saída de $D(\langle D\rangle)$ ?

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} \text{aceita}, & \text{se } D \text{ não aceita } \langle D\rangle \\ \text{rejeita}, & \text{se } D \text{ aceita } \langle D\rangle \end{cases}$$

| | $\langle M_1\rangle$ | $\langle M_2\rangle$ | $\langle M_3\rangle$ | $\langle M_4\rangle$ | $\langle M_5\rangle$ ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | A | | A | | |
| $M_2$ | A | A | A | A | |
| $M_3$ | | | | | |
| $M_4$ | A | A | | | |
| $M_5$ | | | | | |
| ⋮ | | | | | |

Supomos que H é um decisor!

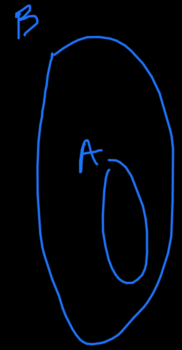
H

| | $\langle M_1\rangle$ | $\langle M_2\rangle$ | $\langle M_3\rangle$ | $\langle M_4\rangle$ | $\langle M_5\rangle$ ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | A | R | A | R | R |
| $M_2$ | A | A | A | A | R |
| $M_3$ | R | R | R | R | R |
| $M_4$ | A | A | R | R | R |
| $M_5$ | R | R | R | R | R |
| ⋮ | | | | | |

Então toda entrada é Aceita (A) ou RejeitA (R)

| | $\langle M_1\rangle$ | $\langle M_2\rangle$ | $\langle M_3\rangle$ | $\langle M_4\rangle$ | ... | $\langle D\rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | A | R | A | R | | |
| $M_2$ | A | A | A | A | | |
| $M_3$ | R | R | R | R | | |
| $M_4$ | A | A | R | R | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | |
| D | R | R | A | A | ... | ? |

**Teorema:** Se $A \subseteq B$ e $A$ é incontável, então $B$ é incontável.




$$\boxed{\text{Teorema} \quad \text{Seja } A \subseteq B \text{ e } B \text{ é contável, então } A \text{ é contável.}}$$

$p \Rightarrow q$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Se $A$ é incontável, então $\underbrace{A \not\subseteq B}_{\text{FALSE}}$ ou $\underbrace{B \text{ é incontável}}_{\text{TRUE}}$

$[0,1)$ é incontável $\Rightarrow \mathbb{R}$ é incontável

**Teorema:** O conjunto

$$B = \{ x_1 x_2 x_3 \dots : \ x_i \in \{0,1\} \}$$

é incontável.

- $0000\dots = \bar{0} \in B$
- $10\overline{10} \in B$
- $1010111 \notin B$

## Ideia da demonstração

| $n$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\dots$ | |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | |
| $i$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | ? | | |

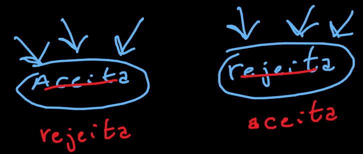
# Os limites Da Computação

**teorema** Uma linguagem $L$ é decidível se e somente se $L$ e $\bar{L}$ são turing-reconhecíveis.

Demonstração

($\Rightarrow$) se $L$ é decidível, então $L$ e $\bar{L}$ são turing-reconhecíveis

- toda linguagem decidível é turing-reconhecível
- Linguagens decidíveis são fechadas sob o complemento
- $L$ e $\bar{L}$ são turing-reconhecível




($\Leftarrow$) se $L$ e $\bar{L}$ são turing-reconhecíveis, então $L$ é decidível.

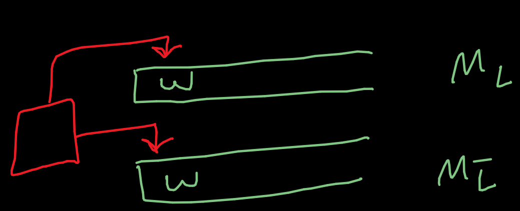
- Sejam $M_L$ e $M_{\bar{L}}$ MT que reconhecem $L$ e $\bar{L}$, respectivamente.

$M =$ "sobre uma entrada $w$:

1. Execute $M_L$ e $M_{\bar{L}}$ sobre $w$ em paralelo
2. Se $M_L$ aceita, aceite. Se $M_{\bar{L}}$ aceite, rejeite."

$w \in L$ ou $w \in \bar{L}$

$M_L$ $M_{\bar{L}}$




- Como $M$ para sempre que $M_L$ ou $M_{\bar{L}}$ aceita, sabemos que $M$ sempre para. Logo, $M$ é decisor.

- Como $M$ aceita qndo $w \in L$ e rejeita qndo $w \in \bar{L}$, $M$ decide $L$

∎

# Propriedades das Linguagens Decidíveis

- Linguagens decidíveis são fechadas sob:

  - união
  - concatenação
  - estrela
  - complemento
  - interseção

# Existem problemas que não são decidíveis

- **Prob:** Dada uma MT e uma cadeia $w$, $M$ aceita $w$?

$$A_{MT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ é MT que aceita } w \}$$

- **Prob:** Dado um polinômio sobre multiplas variáveis, ele possui raiz inteira?

$$R_{int} = \{ \langle p \rangle \mid p \text{ é um polinômio com raiz inteira} \}$$

Não é possível criar algoritmos para esses problemas

são <u>insolúveis</u>.

# Existem problemas que não são decidíveis

- $A_{MT}$ é turing-reconhecível

  U = " Sobre a entrada $\langle M, w \rangle$, onde M é uma MT, faça:

  1. simule M sobre w
  2. Se M aceita w, aceite. Se M rejeita, rejeite "

- $R_{int}$ é turing-reconhecível

  P = " Sobre a entrada $\langle p \rangle$, onde p é um polinômio:

  1. para cada valor da sequência: 0, 1, -1, 2, ...
     calcule p sobre esse valor.
     - Se deu 0, aceite

- Todo problema que não é decidível pode ser reconhecido?

Não. Existem problemas que não são turing-reconhecíveis

**Teorema** Existem linguagens que não são turing-reconhecíveis

**Demonstração**

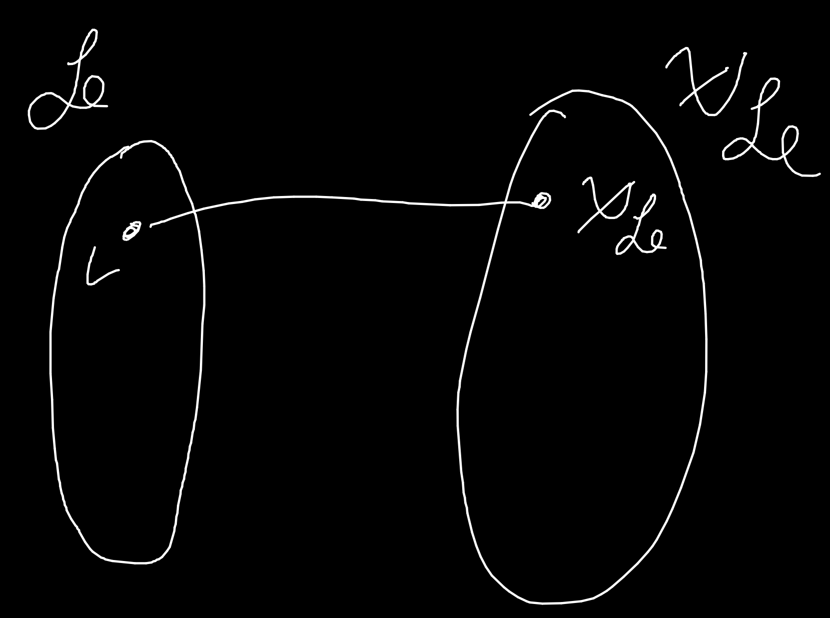
- Seja $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, \dots\}$ o conjunto de todas as linguagens sobre $\Sigma$
- $\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, w_4, \dots\}$
- Para qualquer $L \in \mathcal{L}$, definimos um vetor característica

$$\chi_L = \text{i-ésimo bit é 1 se } w_i \in L; \quad 0 \text{ caso contrário.}$$

$\Sigma = \{a, b\}$

| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma^* = \{$ | $\varepsilon$, | a, | b, | aa, | ab, | ba, | bb, | aaa, ... |
| $L = \{$ | | | b, | | ab | , | bb | ... |
| $\chi_L =$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 ... |

$L \subseteq \Sigma^*$




- Seja $\chi_{\mathcal{L}} = \{\chi_L : L \in \mathcal{L}\}$
- $\chi_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{L}$
- Note que $B = \chi_{\mathcal{L}}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |
| $L_w$ | | $w_2$ | | | $w_5$ | $w_6$ | | |

- B é incontável

- $\chi_{\mathcal{L}} \sim \mathcal{L}$
- $\mathcal{L}$ é incontável
- O conjunto $M$ de todas as máquinas de turing é contável.
- Como toda máquina de turing reconhece apenas uma linguagem, temos que o número de linguagens é muito maior que o de MT's

teorema: $\overline{A}_{MT}$ não é turing-reconhecível

> teorema Uma linguagem $L$ é decidível se e somente se $L$ e $\overline{L}$ são turing-reconhecíveis.

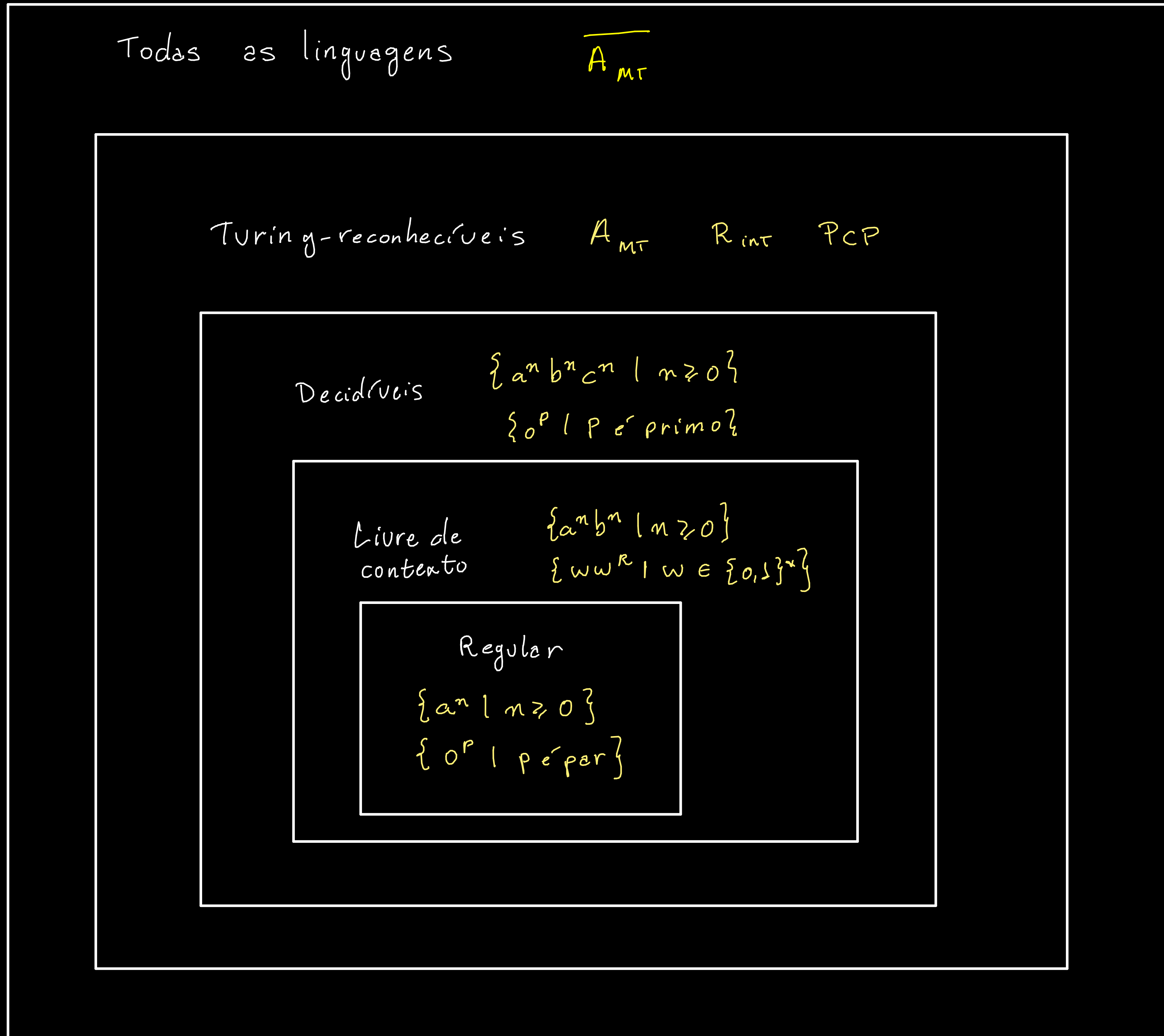
- Se $\overline{A}_{MT}$ fosse turing-reconhecível, $A_{MT}$ seria decidível, contradição

$$\overline{A_{MT}} = \Sigma^* \setminus A_{MT} \qquad \blacksquare$$

$$A_{MT} = \{\langle M, w\rangle : M \text{ e } MT \text{ e } M \text{ aceita } w\}$$

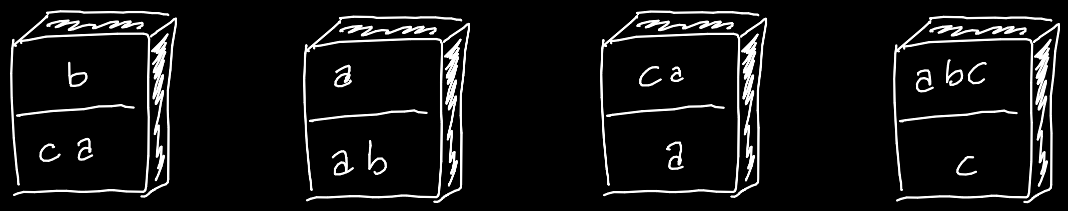
# Propriedades de fechamento

- Linguagens turing-reconhecíveis são fechadas sob:
  - união.
  - concatenação.
  - estrela.
  - interseção.



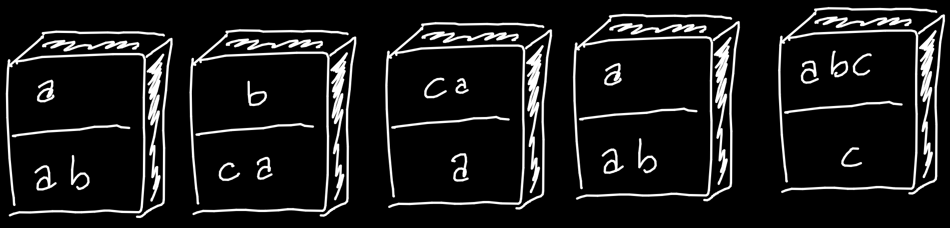
Todas as linguagens
$\overline{A}_{MT}$
Turing-reconhecíveis
$A_{MT}$
$R_{INT}$
PCP
Decidíveis
$\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
$\{0^p \mid p$ é primo$\}$
Livre de contexto
$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
$\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
Regular
$\{a^n \mid n \geq 0\}$
$\{0^p \mid p$ é par$\}$

# Post correspondence Problem (PCP)

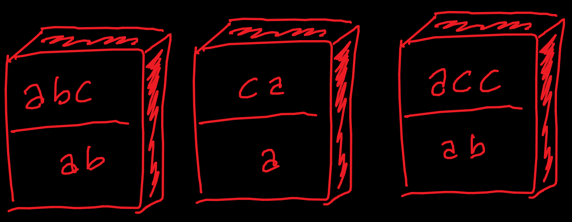



entrada : um conjunto de dominos

saída : <u>sim</u> , se existe uma sequência de dominos (repetição permitida) tal que a cadeia formada no topo é igual a do chão.




a b ca a abc




Problema : <u>Post correspondence Problem (PCP)</u>

entrada : um conjunto de dominos

saída : <u>sim</u> , se existe uma sequência de dominos (repetição permitida) tal que a cadeia formada no topo é igual a do chão.

Não existe um algoritmo para o PCP